Probability Density Functionalの解析 : Noiseの分離 (制御問題の数学的研究報告集)

山縣, 秀雄

数理解析研究所講究録
33巻 1967年 147-166

Probability Density Functional の解析 (Noise の分離)

阪府大 工　山縣 秀雄

§1. 序.

Noise の典型的な例として S. O. Rice は[6]の中で真空管の shot effect を又 L. A. Wainstein と V. D. Zubakov は[13]の中で radar 探知の問題をあげて解析している. 他の場合にも影響の大きな要因によってひき起される部分を法則として近似的に示しその残りは確率論的に處理する(又は處理しなければならない)事が多い. 確率の入った制御問題はこういふ意味で重要性をもっている. こゝではそれに関係した一つの方向として E. Parzen の noise の分離の話(即ち filtering の研究)を nuclear space を用いて修正し進展させて紹介する[8][12]. この話は prediction と関係して更に興味のある結果をうみ出す. 但しこの方面の根底思想は大部分が N. Wiener によるものである[3]. こゝで述べられる E. Parzen の仕事は次の三つの事柄に分れ probability density functional という立場から統一して示される. (1) Noise の分離の問題の

統計的 formulation (ii) time seriesの展開 (iii) signal の分析.

E. Parzen の統一は prediction 以後に対しては困難であり、又所々に数学的条件の不十分さも見られる。以下これを詳述す.

§2. Gaussian measure に関する dichotomy と perfectly detectable hypothesis.

(a) 実関数論からの準備[1]

定義 2.a.1. 集合関数とは定義域が抽象空間 X の部分集合族 $\mathfrak{X}$ で値域が実数の関数を言う.

定義 2.a.2. $\mathfrak{X}$ が次の条件を満足する時完全加法的集合体又は Borel 集合体と言う. (i) $\mathfrak{X}$ は少くとも1つ空でない集合を含む. (ii) $E \in \mathfrak{X}$ ならば $E^c \in \mathfrak{X}$. (iii) $E_n \in \mathfrak{X}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ ならば $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{X}$.

定義 2.a.3. 集合 E が $\mathfrak{X}$ - 可測であるとは $E \in \mathfrak{X}$ である事だ.

定義 2.a.4. $(X, \mathfrak{X})$ 上の測度 $\mu(E)$ とは $\mathfrak{X}$ 上の集合関数であって次の条件を満足するものである。 (i) 任意の $E \in \mathfrak{X}$ に対して $\infty \geqq \mu(E) \geqq 0$. (ii) $E_i \in \mathfrak{X}$ $(i = 1, 2, \cdots)$ $E_i \cap E_j = \phi$ $(i \neq j)$ の時に $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$.

定義 2.a.5. この測度に関して可測関数とその積分が定義出来る. その積分を Radon 積分と呼ぶ. これは Lebesgue 積分の拡張である.

定義 2.a.6. 完全加法的集合関数とは $\mathfrak{X}$ 上の集合関数 $\Phi(E)$ で

次の条件を満足するものを言う。(i) 任意の $E \in \mathfrak{X}$ に対して $\Phi(E) < +\infty$、(ii) $E_i \in \mathfrak{X}\ (i=1,2,\cdots)$, $E_i \cap E_j = \phi\ (i \neq j)$ ならば $\Phi(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi(E_i)$.

定義 2.a.7. $\mathfrak{X}$ で定義された完全加法的集合関数 $\Phi(E)$ と測度 μ があるとする。Φ が μ absolute continuous とは $\mu(E)=0$ なるすべての $E \in \mathfrak{X}$ に対して $\Phi(E)=0$ なることである。Φ が μ singular function であるとは $E_0 \in \mathfrak{X}$, $\mu(E_0)=0$ なる E_0 が存在して任意の $E \in \mathfrak{X}$ に対して $\Phi(E) = \Phi(E_0 \cap E)$ なる事である。今 $\Phi(E) \equiv 0$ でないとする。$\Phi(E)$ が μ absolute continuous であれば μ singular function でない。又 μ singular function であれば μ absolute continuous でない。

定理 2.a.1. (Lebesgue の分解定理) (i) $\mu(X) < +\infty$ 又は $\mu(X) = +\infty$ であっても X が測度有限な可附番個の可測集合の和に分解出来るとする。(ii) $\Phi(E)$ が完全加法的集合関数であるとする。その時 $\Phi(E) = \Phi_1(E) + \Phi_2(E)$ 但し $\Phi_1(E)$ は μ-absolute continuous, $\Phi_2(E)$ は μ singular function である様な完全加法的集合関数の和に一意に分解出来る。

定理 2.a.2. (Radon-Nikodym の定理) $\Phi(E)$ が μ-absolute continuous 完全加法的集合関数であるための必十条件は $\Phi(E) = \int_E \varphi(x)\, d\mu(x)$ で表示される事である。但し $\varphi(x)$ は μ 積分可能な関数。

(b) Nuclear space からの準備。[2]

定義 2.b.1. Linear space Φの要素である任意のφに対して次の不等式を満足する normの系列 $\|\varphi\|_1 \leqq \|\varphi\|_2 \leqq \|\varphi\|_3 \leqq \cdots$ があったとする。norm $\|\ \|_p$でΦを完備化して作るHilbert spaceをΦ_pとすると$\Phi_1 \supseteq \Phi_2 \supseteq \cdots$である。$\bigcap_{p=1}^{\infty} \Phi_p = \Phi$を満足する$\Phi$をcountably normed Hilbert spaceと言う。

定義 2.b.2. $\{\varphi_k\}$、$\{\psi_k\}$がΦ_n, Φ_mの中のorthonormal systemであるとし、任意の$\varphi \in \Phi_n$に対して$T_m^n \varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (\varphi, \varphi_k)_n \psi_k$ ($\lambda_k \geqq 0$；φ_k ψ_kに対する符号で$\lambda_k \geqq 0$を満足させうる)である様に$\{\varphi_k\}$, $\{\psi_k\}$が選出されたとする。$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k < +\infty$の時$T_m^n$を核型であると言ひ、$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^2 < +\infty$の時Hilbert Schmidt型であると言う。$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$の時完全連續であると言う。これは通常の意味での完全連續な写像即ちbounded setをcompact setへうつす写像と一致する。

定義 2.b.3. $\Phi_n \supset \Phi \ni \overset{(n)}{\varphi}$を$\Phi_m$の中へうつす恒等写像を$\Phi_n$の中で連續にひろげたものを$T_m^n$とする($m \leqq n$)。$m \leqq n \leqq p$の時$T_m^p = T_m^n T_n^p$が成立する。任意の$m$に対して$T_m^n$が核型になる$n$が存在する時$\Phi$はnuclear space (常にseparable)であると言う。

例 2.b.1. $\Phi = (S) \equiv \{\varphi;\ \varphi \in C^{\infty}, \lim_{|x|\to\infty} |x^k D^p \varphi(x)| = 0 \text{ for all integers } p, k > 0\}$ はnuclear spaceである。

定義 2.b.4. (Rigged Hilbert space) $\varphi, \psi \in \Phi$にcomplex value (φ, ψ)が対応し次の性質(i)〜(v)を持つとする。

(i) $(\varphi_1 + \varphi_2, \psi) = (\varphi_1, \psi) + (\varphi_2, \psi)$ (ii) $(\alpha\varphi, \psi) = \alpha(\varphi, \psi)$ (iii) $(\varphi, \psi) = \overline{(\psi, \varphi)}$

(iv) $(\varphi,\varphi)\geq 0$, $(\varphi,\varphi)=0$ の必十条件は $\varphi=0$. (v) $\lim_{n\to\infty}\varphi_n=\varphi$ が countably normed nuclear space Φ の中で成立するならば $\lim_{n\to\infty}(\varphi_n,\psi)=(\varphi,\psi)$.

今 $\|\varphi\|=\sqrt{(\varphi,\varphi)}$ での Φ の completion を H とする. その時 $\Phi\subseteq H\subseteq\Phi'$ の組は rigged Hilbert space と呼ばれる.

定義2.b.5. Φ の要素から成る或る系列 $\{\varphi_n\}=(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_k,\cdots)$ を用いて $I_{\{\varphi_n\},k,A}=\{F;\ F\in\Phi',\ ((F,\varphi_1),\cdots,(F,\varphi_k))\in A\}$ (A; Borel set in E^k) を作る時 $I_{\{\varphi_n\},k,A}$ を cylinder set, A を切口と呼ぶ. A は $(F,\varphi_1),\cdots,(F,\varphi_k))$ $(F\in H)$ で表示する事が出来る.

定義2.b.6. $\mathfrak{B}$ を Φ' の中の cylinder set 全体を含む最小の Borel 集合体とする. cylinder set に対する値が切口の Gaussian measure の値 $\mu(A)=\frac{1}{(2\pi)^{k/2}}\int_A e^{-\frac{1}{2}(x,x)}dx$ etc. になる完全加法的集合関数を Φ' の中の Gaussian measure と呼ぶ.

定義2.b.7. 完全加法的な positive normalized (total measure 1) measure を確率と言う.

正規分布による確率即ち Gaussian measure (total measure 1で完全加法的)はこのふくらんだ Φ' の中でないと定義出来ない. この事は必十条件として [2] IV P 428 に示されている. 更に一般の確率分布に対するこれに関係した定理として [2] IV P 413 に次のものが述べられ且証明されている.

定理2.b.1. H を Hilbert space, $\{\varphi;\ \varphi\in H,\ ((\varphi,\varphi_1),\cdots,(\varphi,\varphi_k))\in A\}$ $(k>K$ (fixed), 且 A は Borel set) を cylinder set とする. H の上

での positive normalized measure μ が countably additive であるための必十条件は positive definite nuclear operator の sequence B_1, B_2, …… による H の中での topology に関係した次に述べる μ に対する連續性が言へる事である。即ち任意の $\varepsilon>0$ に対して適当な n と $\delta>0$ が存在し $\mu[\{\psi; |(\varphi,\psi)|\geq 1\}] < \varepsilon$ for any φ satisfying $(B_n\varphi,\varphi)\leq\delta$ が成立する事である。

(C) E. Parzen の perfectly detectable.

$t \neq t'$ の時 $N(t)$, $N(t')$ が独立な確率変数となる time series $\{N(t); t=1,2,3,\cdots\}$ を考える。$\prod_{t=1}^{\infty} E_t$ 内で $P\{a_t \leq N(t) < b_t; t=1,2,\cdots\} = \prod_t P\{a_t \leq N(t) < b_t\}$ から得られる測度を考えこれと $\{N(t); t=1,2,3,\cdots\}$ を対応させる。すべての t に対して $N(t)$ が正規分布であればこの time series は Φ' での gaussian measure に対応する。即ちこの場合 $\prod_{t=1}^{\infty} E_t$ は実質的にはそれに含まれる或る Φ' でよく Hilbert space では不十分である。$\{S(t); t=1,2,3,\cdots\}$ を signal とし $\{S(t)+N(t); t=1,2,3\cdots\}$ を考えればそれは分布の中心の移動に対応する。Gaussian measure の場合に $N(t)$ 又は $S(t)+N(t)$ に対応する確率を用いて統計を行ない signal と noise の分離をするのが E. Parzen の方法であるが空間の無限次元化にともない次の perfectly detectable の場合が生じて来る。

定義 2. C. 1. 帰無仮説として H_0; $X(\cdot)=N(\cdot)$ (noise only)、対立仮説として H_1; $X(\cdot)=S(\cdot)+N(\cdot)$ (signal + noise) を考えて検定を行

なう．もし次の条件を満足する見本過程の集合Aがあるならばこの時H_0とH_1は perfectly detectable であると言う．

$P_N[A] = \mathrm{Prob}[\{X(t), t\in T\}\in A \mid H_0] = 0$, $P_{S+N}[A] = \mathrm{Prob}[\{X(t), t\in T\}\in A \mid H_1] = 1$,

この場合P_{S+N}はP_N measure 0の集合へ集まるからP_{S+N}はP_N-singular function である事を示している．又逆にP_NがP_{S+N} measure 0の集合へ集まるからP_{S+N}-singular function でもある．今 perfectly detectable であり且又上の集合Aが求められたとする．H_0であり見本過程がAに入るとすればその probability は0，したがってAに入る見本過程が得られた時にはH_0でないと言える．然しAを利用出来る形で求める事はむづかしいので perfectly detectable で signal がありそうだとわかればほゞ確実に signal がある位の事しかいえない．

次にP, P_1を(Ω, B)上の二つの測度とし，$\alpha = (A_1, A_2, \cdots, A_{n_\alpha})$を$\Omega$の可測分解として entropy $H(P_1/P) = \sup_\alpha \sum_{i=1}^{n_\alpha} P_1(A_i)\log\{P_1(A_i)/P(A_i)\}$と entropy の和 $I(P_1/P) = H(P_1/P) + H(P/P_1)$ $(= \sup_\alpha \sum_{i=1}^{n_\alpha}(P_1(A_i) - P(A_i))(\log P_1(A_i) - \log P(A_i)) \geq 0)$を導入する．$P_1$が$P$-absolute continuous ならば $H(P_1/P) = \int_\Omega \log\frac{dP_1}{dP}dP_1 < +\infty$，そうでなければ$H(P_1/P) = +\infty$，又$I(P_1/P)$が収束するならば$P_1$ Pは互に絶対連續，$I(P_1/P) = +\infty$ならば互に絶対連續でない事が知られている．E. Parzen はTの subset $T' = \{t_1, \cdots, t_n\}$に対し$I_{T'}(P_1/P)$を作り $\lim_{T'\to T} I_{T'}(P_1/P) = J_T$ (divergence) を定義してこれを使用している．次元の増加につれて Borel 集合体が増大

するならば $T_1 \subseteq T_2 \subseteq \cdots$ と共に $I_{T_1} \leqq I_{T_2} \leqq \cdots$ が成立する。$J_T < +\infty$ ならば P_{S+N} は P_N に関して absolute continuous で $p = \dfrac{dP_{S+N}}{dP_N} = \lim\limits_{T' \to T} p_{T'}$ $\left(\equiv \lim\limits_{T' \to T} \dfrac{dP_{S+N,T'}}{dP_{N,T'}}\right)$ となり，$J_T = +\infty$ ならば $\{N(t);\, t \in T\}$ と $\{S(t);\, t \in T\}$ が normal である時 P_{S+N} と P_N はお互いに singular function となる。
こゝで T は interval でもよい。

(i)　この最後の結果に関係した gaussian measure の dichotomy と呼ばれる次の Гаек, Розанов, Feldmann の結果[1](1958) がある。

補題 2.c.1.　P, P_1 を $\prod_{k=1}^{\infty} E_k = [\{x_1(\omega), x_2(\omega), \cdots\}]$ の中で定義されている gaussian measure とする。$E(x_k)=0$, $V(x_k)=1$, $(k=1,2,\cdots)$ で $0 < A < V_1(x_k) \leqq B < +\infty$ for all k でなければ P, P_1 は互に他の singular function である。

補題 2.c.2.　gaussian measure P, P_1 に対し $J(P, P_1)$ が収束すれば互に絶対連続，発散すれば互に他の singular function である。

定理 2.c.1.　P, P_1 が gaussian measure ならば絶対連続又は互に他の singular function である。

(ii)　И.М. Гельфанд は[2] IV P447 で次の結果を与えている。

定理 2.c.2.　Λ を complete linear separable space とし $\Lambda \supset^{\exists} X$ は compact で $\tilde{X} = \{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k;\, x_k \in X,\, 1 \leqq k \leqq n,\, |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_k| \leqq 1\}$ が Λ の中で non-dense (内点なし) である様なものだとする。その時 Λ の中の quasi invariant measure (即ち $\mu(X)=0 \to \mu(y+X)=0$ for all $y \in \Lambda$) は 0 である。

この定理は分布の中心の移動でえられる measure が常にもとの measure に対して絶対連續であるとは限らない事を示している。$\Lambda = \Phi'$, μ = Gaussian measure とすれば定理 2.c.1. 定理 2.c.2. で signal y のとり方によって $\mu(X+y)$ と $\mu(X)$ は perfectly detectable になる事を示している。

(iii) D. Slepian の結果 [18] (1958)、[13] appendix 3 によれば、

定理 2.c.3、$f(t) = m(t) + n(t)$ で $m(t), n(t)$ は Gaussian with zero mean and known spectral density とする。$m(t)+n(t)$, $m(t)$ の spectral density $S_{m+n}(\omega)$, $S_n(\omega)$ は $S_{m+n}(\omega) \neq S_n(\omega)$ であるとする。もし $S_{m+n}(\omega)$ と $S_n(\omega)$ が rational で $\lim_{\omega \to \pm\infty} \frac{S_{m+n}(\omega)}{S_n(\omega)} \neq 1$ ならば $f(t)$ $(0 \leqq t \leqq T)$ に対する detection ($m+n$ or n) は任意の $\varepsilon > 0$ と任意の $T > 0$ に対して false alarm prob $F < \varepsilon$, detection prob $D > 1-\varepsilon$ となる決定法則がある。もし $S_{m+n}(\omega)$ と $S_n(\omega)$ が carrier compact ならば $m+n$ と n は singular となる。

perfectly detectable の問題は無限次元空間の本質 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \cdots = 0$ に関係したもので van Hove Miyatake の困難とも関係がある。

(d) reproducing kernel Hilbert space.

Time series $\{X(t); t \in T\}$ に対する covariance matrix を $\|K(s,t)\| = \|E[X(s)X(t)]\|$ とする。$\|K(s,t)\|$ が non singular であるとしてこの $\|K(s,t)\|$ に対する reproducing kernel Hilbert space $H(K;T)$ (又は $H(K)$) を次に定義する。

定義 2.d.1. (α) $H(K;T)$ の要素は T の上で実数値をとる関数だ、

(β)任意の固定された $t \in T$ に対して $K(\cdot, t) \in H(K; T)$ となる。

(γ)任意の $t \in T$ と任意の $f \in H(K; T)$ に対して $f(t) = (f(\cdot), K(\cdot, t))_{K,T}$ となる、但し $(f, g)_{K,T} = \sum_{s,t \in T} f(s) K^{-1}(s,t) g(t)$. ($K(s,t)$ はこの内積に関する再生核).

内積 $(\ ,\ )_{K,T}$ で出来た norm によって完備な(α)(β)(γ)を満足する空間を reproducing kernel Hilbert space と呼ぶ.

即ち reproducing kernel Hilbert space とは $\{\sum_j c_j K(\cdot, t_j)\ ;\ c_j \text{ real}, \sum_j \text{ finite sum}\}$ を $(\ ,\ )_{K,T}$ で出来た norm で completion した空間であり、それに対応する conjugate nuclear space Φ' も定義出来る.

(i) Noise process $\{N(t); t \in T\}$ がすべての $T' = \{t_1, \cdots, t_n\}\ (\subset T)$ に対して non-singular covariance matrix $\| K(s,t)\ ;\ s,t \in T' \|$ をもつ平均 0 の normal process とする. $\{S(t); t \in T\}$ が non random 即ち sure signal case であれば $\log p_{T'} \equiv \log \frac{d P_{S+N,T'}}{d P_{N,T'}} = (X, S)_{K,T'} - \frac{1}{2}(S,S)_{K,T'}$, $I_{T'} = E_{S+N}[(X,S)_{K,T'}] - E_N[(X,S)_{K,T'}] = (S,S)_{K,T'}$ となる. こゝで $K = \| K(s,t)\ ;\ s,t \in T' \|$ は正規分布の exp 内の σ^2 に相当するものである. もし $N(t)\ N(t')\ (t \neq t')$ が independent ならば $K_{T'} = \begin{Vmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n^2 \end{Vmatrix}$, $K_{T'}^{-1} = \begin{Vmatrix} \sigma_1^{-2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n^{-2} \end{Vmatrix}$, $(S,S)_{K,T'} = \sum_{i=1}^{n} (S_i/\sigma_i)^2$ となる. この事は signal to noise ratio の2乗の和が発散すれば perfectly detectable である事を示している.

(ii) $\{S(t); t \in T\}$ が $\{N(t); t \in T\}$ と独立な time series で且 $E\{S(t)\} = 0$ 且 $R(s,t) = E[S(s)S(t)]$ が positive definite であるとする. この時即ち stochastic signal case において $g(\cdot, \omega) \in H(K; T)$ 特に $g(\cdot) = \sum_{i=1}^{n} c_i K(\cdot; t_i)$

から signal が出来ている時 perfectly detectable でない。

Optimum extractor とは Bayes の rule を用いて得られる母数([13]では到達時間T)の推定量で，detector とは(perfectly detectable に関係した) noise の検定に有効な測定量である。Optimum detector とはその最も有効なもので先の(i)の場合には$(X, S)_{K,T}$をそれと見做してよい。こういう方法は Wiener の結果の精密化と統一として意味があり，たとえ工学的に有効な新しい結果は出なくても Optimum detector 以上のものを探す試みをやめさせる等の効果があると[13]には述べられている。尚[13]では T でなくて T' による近似を実用化している。

§3. Time series の展開。

Time series の展開には N. Wiener による一般的なもの[17] P18 があるがそれの計算は必ずしも容易でない。その一次近似を変形して E. Parzen は次のものを示している。

定義 3.1、Time series $X(t, \omega)$ を $X(t, \omega) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \psi_\nu(t)\eta_\nu(\omega)$ $t \in T$ の形で表示する事を E. Parzen の展開と言う。ここで$\{\eta_\nu(\omega)\}$ $\{\psi_\nu(t)\}$は (i) $E[\eta_\alpha \eta_\beta] = \delta(\alpha, \beta) = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \neq \beta \end{cases}$ (ii) $(\psi_\alpha, \psi_\beta)_T = 0$ $\alpha \neq \beta$ を満足する。

E. Parzen の展開は∞次元空間の中の座標軸の変換に対応し Optimum detector 等の計算に有用である。しかしながら適用範囲に限界があって展開とその対象となる分布が常には一致し

なり、E. Parzen の展開において $(\psi_\alpha(s), K_x(s,t))_G = \lambda_\alpha \psi_\alpha(t)$ を満足するGの完全系 $\{\psi_\alpha(s)\}$ の存在が重要な問題となる、それは conjugate nuclear space Φ' においては既に解決されている、

定義 3.2. Operator A が定義域として Hilbert space H の dense subset Ω_A 値域として H をもち次の二つの条件を満足するとする。(i) $f, g \in \Omega_A$ ならば $(Af, g) = (f, Ag)$ が常に成立する。(ii) $g \notin \Omega_A$ に対して $g_1 \in H$ が存在し $(Af, g) = (f, g_1)$ がすべての $f \in \Omega_A$ に対し成立する、その時 A は H で self adjoint と言う、

定義 3.3. ある内積からの norm での nuclear space Φ の completion を H とし、更に A から作られるこの norm での closed operator がこの内積によって H で self adjoint であるとする、その時 A は $\Phi \subset H \subset \Phi'$ で self-adjoint であると言う、

定理 3.1. Rigged Hilbert space $\Phi \subset H \subset \Phi'$ の中の self-adjoint operator (in H) は実数に対応する generalized characteristic vector の(Φ'での)完全系をもつ、

E. Parzen は次の形の定理を与えているが Hilbert space の使用から生ずる K に対する条件は可成り強い。

定理 3.2. G は T の上で定義された関数の作る Hilbert space (L^2 space 又は reproducing kernel Hilbert space)、$\{X(t); t \in T\}$ は covariance kernel (matrix) K をもつ time series, $\mathbb{K}$ は $\mathbb{K}g(t) \equiv (g, K(\cdot, t))_G$ で定義される G 上の operator であるとする、K が

finite double G-norm を持つ時任意の $g\in G$ に対して $\mathbb{K}g\in G$ となり、$\mathbb{K}$ は linear self adjoint non-negative definite completely continuous operator である。

$\mathbb{K}g=\lambda g$ の固有値を $\lambda_1\geqq\lambda_2\geqq\cdots\to 0$ それに対する固有関数を $\varphi_1,\varphi_2,\cdots$ とすると $K(s,t)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu\varphi_\nu(s)\varphi_\nu(t)$, $\xi_\nu=\iint_{T\times T}X(t)\varphi_\nu(t')K^{-1}(t,t')dtdt'$ (確率積分), $X(t)=\sum_\nu\xi_\nu\varphi_\nu(t)$ 等となる。Rigged Hilbert space $\Phi'\supset H\supset\Phi$ を用いる場合 $X(t)$ に或る意味での定常性があれば確率積分による $\xi_\nu=\iint_{T\times T}X(t)\varphi_\nu(t')K^{-1}(t,t')dtdt'$ と E.R.積分による E.R. $\iint_{T\times T}X(\omega,t)\varphi_\nu(t')\cdot K^{-1}(t,t')dtdt'$ ($X(\omega,t)$ は Φ' の要素の E.R.積分表示) の分布とは一致する。定理3.2.の利点は optimum detector $(X,h)_K$, $(h,h)_K$ 等の G を用いた漸近的計算法の確立である。即ち time series $\{X(t), t\in T\}$ は reproducing kernel Hilbert space を作りうる covariance kernel K をもち、その K による固有関数の完全系 $\{\varphi_\nu\}$ と $\{\varphi_\nu\}$ のはる Hilbert space G が定義され、$N=\|K\|_{G\otimes G}<+\infty$ であるとする。その時 $h\in H(K)(\in G)$, $H_{n+1}=H_n-\alpha_n(\mathbb{K}H_n-h)(\in G)$ $n=1,2,\cdots$ $(0<\alpha_n\leqq 2/N,\ (N=\|K\|_{G\otimes G}))$ で定義される $\{H_n\}$ (in G, 定理3.2) に対して $\lim_{n\to\infty}E[|(X,h)_K-(X,H_n)_G|^2]=0$ $(h,h)_K=\lim_{n\to\infty}(K,H_n\otimes H_n)_{G\otimes G}$ となる。Nuclear space を用いても (in Φ') [17] の様に有限次元近似が利用出来ればこの方法はそのまゝ適用出来る。

E. Parzen は更にこの $(X,h)_K$, $(h,h)_K$ に用いた内積を利用して確率過程の未来値 $U=X(t_0)$ の linear prediction, non-linear prediction

の求め方を示している。先づ $L(X(t), t\in T)=\{V;\ V=\sum_{j=1}^{n} c_j X(t_j),\ c_j$ real constant, $t_j\in T$, n arbitrary finite$\}$, $N(X(t), t\in T)=\{V;\ V=g(X(t_1), \cdots, X(t_n))$, g Borel measurable, $t_j\in T$, n arbitrary finite$\}$ とする。$E[|U^*-U|^2]=\min_{V\in L(X(t),t\in T)} E[|V-U|^2]$ の時 $U^*=E'[U|X(t), t\in T]$ を U の linear prediction [9] P37, $E[|\hat{U}^*-U|^2]=\min_{V\in N(X(t),t\in T)} E[|V-U|^2]$ の時 $\hat{U}^*=E[U|X(t), t\in T]$ を U の non-linear prediction と言う。$K(s,t)=E[X(s)X(t)]$，$E[UX(t)]\equiv\rho_U(t)\in H(K(s,t))$ とすれば $E'[U|X(t), t\in T]=(X, \rho_U)_K$ となり，$K(s,u;t,v)=E[e^{iuX(s)}e^{-ivX(t)}]$，$E[Ue^{ivX(t)}]\equiv\rho_U(t,v)\in H(K(s,u;t,v))$ とすれば $E[U|X(t), t\in T]=(e^{ivX(t)}, \rho_U)_K$ となる。

E. Parzen の展開には次の欠点がある、即ち実際の分布には先の $X(t,\omega)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\varphi_\nu(t)\eta_\nu(\omega)$ の形にならないものが多くあるにもかゝわらずそれに対しても彼の方法によって形式的に無相関をそのまゝ独立と見做す事により上の形を与える事が出来る。その場合実際の分布と展開が一致しない，（一致するのは normal process + some thing 程度である）という点である。Non linear prediction に対しては特にこの点に注意が必要である。

§4. signal の分析

signal f に対し covariance function $\phi(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t+\tau)\overline{f(t)}\,dt$，$\tau\in(-\infty,\infty)$
$\phi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-itu}\,dS(u)$ とする。

定義 4.1. $\phi(t)=\delta(t)$，$S'(\lambda)=1/\sqrt{2\pi}$ である signal W を white noise signal と呼ぶ [1] P107.

White noise signal とは特調を与える frequency や振巾がない事を意味している。

定義 4.2. (Autoregressive scheme) $Y(n)$, $n=\cdots,-1,0,1,\cdots$ が互に無相関な平均 0、分散 $\sigma^2>0$ の確率変数の列とする。今確率差分方程式 $a_0X(n)+a_1X(n-1)+\cdots+a_mX(n-m)=Y(n)$ $(a_0\neq 0)$ を満足する定常系列 $X(n)$ があればそれを autoregressive scheme と呼ぶ。

(a) Autoregressive scheme の存在のためには $a(e^{-i\lambda})=a_0+a_1e^{-i\lambda}+\cdots+a_me^{-im\lambda}\neq 0$ $(-\pi\leq\lambda\leq\pi)$ である事が必要且十分である。この scheme は存在すれば一意であり、この scheme の spectral 分布関数 $F_X(\lambda)$ は絶対連続、spectral 密度関数は $f_X(\lambda)=\frac{dF_X(\lambda)}{d\lambda}=\frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{1}{|a(e^{-i\lambda})|^2}$ $(-\pi\leq\lambda\leq\pi)$、又 $X(n)$ は $X(n)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{in\lambda}\frac{1}{a(e^{-i\lambda})}dZ_Y(\lambda)$ で表示される。($Z_Y(\lambda)$ は表示 $Y(n)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{in\lambda}dZ_Y(\lambda)$ に使用される直交過程)。

(b) $X(n)$ が任意の n に対して $E\{Y(n)\overline{X(n-\nu)}\}=0$, $\nu=1,2,\cdots$ を満足する autoregressive scheme であれば $\{X(n-\nu),\nu=1,2,\cdots\}$ からの linear prediction $\hat{X}(n)$ は $\hat{X}(n)=-\sum_{k=1}^{m}\frac{a_k}{a_0}X(n-k)$ で $E\{|X(n)-\hat{X}(n)|^2\}=\sigma^2/|a_0|^2$ となる。

(c) $X(n)$ が autoregressive scheme であり且 $a(z)=0$ は重根をもたないとする。$z_1,\cdots,z_m$ を相異なる zero 点とすれば $E\{Y(n)\overline{X(n-\nu)}\}=0$, $\nu=1,2,\cdots$ であるためには $|z_\nu|>1$ $\nu=1,2,\cdots,m$ が必要且十分である。

E. Parzen は 1941～1961 の monthly series of international airline passenger に対する signal の分析を次の順で行なった。

(i) この series を見本過程とする stochastic process を作り その もこ

の series の windowed sample spectral 密度関数(定義4.8)をも調べておく、(stochastic process の形成は一点の近傍での変動を利用するのであろうが多分複雑となるだろう。)

(ii) linear prediction $\hat{X}(n)=\sum_{k=1}^{m}C_k X(n-k)$ を求め(確率過程に対して) autoregressive scheme の差分形式に対応するものを構成する、

(iii) $\hat{X}(n)$ の中で影響の大きい項を大きいほうから順に i 項加えて $\hat{X}_i(n)$ を作る、

(iv) $X(n)-\hat{X}_i(n)=\varepsilon_i(n)$ ともとの series のそれに対応するものを作り (i)(stochastic process の形成を除く)(ii)(iii)(iv) の操作をくり返す、

(v) windowed sample spectral 密度関数が white noise に対するものになった所でとめ (i) をくり返した時の結果を利用し最後に signal の総合分析をする、

非定常過程に定常過程をあてはめる時に window が重大な意味をもつが window の使用だけでこれが可能かどうかも問題である、window に関連した次の定義を述べる。先ず sample としては長さ T の sample function (non random finite series) をとる。

定義4.3、 sample convolution function; $R_T(V)=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T-V}X(t)X(t+V);\ V=0,\cdots,T-1,$
$=R_T(-V);\ V=-1,\cdots,-(T-1),$
$=0\ ;$ その他.

定義4.4、 sample correlation function ; $\rho_T(V)=R_T(V)/R_T(0)$.

定義4.5、 sample spectral density; $f_T(\omega)=\frac{1}{2\pi}R_T(0)+\frac{1}{\pi}\sum_{V=1}^{T-1}\cos V\omega\cdot R_T(V),$

定義4.6、 sample distribution function; $[0,\pi]$ で定義された ω の

monotone increasing function で $F_T(\omega) = 2\int_0^{\omega} f_T(\lambda)\,d\lambda$

$$= \frac{\omega}{\pi} R_T(0) + \frac{2}{\pi}\sum_{\nu=1}^{T-1} \frac{\sin \nu\omega}{\nu} R_T(\nu).$$

定義 4.7、normalized sample spectral density function; $\bar{f}_T(\omega) = f_T(\omega)/R_T(0)$

定義 4.8、windowed sample spectral density function; $f_{T,M}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\sum_{|\nu|\le M} \cos\nu\omega \cdot K\left(\frac{\nu}{M}\right) R_T(\nu)$.

以下定義4.6，定義4.7に対応して $F_{T,M}(\omega)$, $\bar{f}_{T,M}(\omega)$ が定義される.

Lag window of the windowed spectrum $K(\cdot)$ として次の二種が与えられている.

(i) $K(u) = \begin{cases} 1 - 6u^2 + 6|u|^3, & |u| \le 0.5 \\ = 2(1-|u|)^3, & 0.5 \le |u| \le 1.0 \\ = 0, & |u| \ge 1 \end{cases}$ Parzen window.

(ii) $K(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1+\cos \pi u), & |u| < 1 \\ = 0, & \text{その他} \end{cases}$ Blackman Tukey window.

その window の使用は ν 空間では遠い時点に対する correlation を落とす事であり ω 空間では平滑化を意味する. その平滑化で white noise になればよい。Parzen window の使用の理由は或る場合に windowed spectrum (一般には discrete な ω の有限点で計られると見られている) を non-negative にするためである.

E. Parzen の signal の分析には非定常な例に対し定常な autoregressive model をあてはめうるかと言う問題点があるが window の使用 etc. が或る程度それを可能にしている様にも見える. 更に彼のねらいは spectral method をこの問題に順次うまくもち込もうという点にある。

References

[1] S.Saks: Theory of the integral, Warszawa, (1937).

[2] И.М. Гельфанд et al.; Обобщенные функции I-III (1960-1965).

[3] N. Wiener: The extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series, John Wiley & Sons, Inc., New York N.Y., (1949).

[4] J.L.Doob: Stochastic processes, John Wiley & Sons, Inc., New York N.Y., (1955).

[5] A. Kolmogoroff: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitrechnung, Springer (1933).

[6] N. Wax: Selected papers on Noise and Stochastic processes, Dover publication (1954).

[7] P. Masani: Wiener's contributions to generalized harmonic analysis, prediction theory and filter theory, Bull. of the American Math. Soc. Vol. 72 No.1 Part II pp 73-125 (1966).

[8] E. Parzen: Extraction and detection problems and reproducing kernel Hilbert spaces, J. Siam control Ser. A, Vol. 1 No.1 pp 35-62 (1962).

[9] R.E. Kalman: A new approach to linear filtering and predition problems, Journal of basic engineering pp 35-45 (1960).

[10] N. Aronszajn: Theory of reproducing kernels, Trans. Amer. Math. Soc., 68 (1950) pp 337-404.

[11] J. Hajek: On a property of normal distribution of any stochastic process Czechoslovak Math. J., 8 (83) (1958) pp 610-618 .

[12] E. Parzen: The role of spectral analysis in time series analysis (to appear).

[13] L.A. Wainstein and V.D. Zubakov: Extraction of signals from noise Prentice Hall (1962).

[14] H. Wold: A study in the analysis of stationary time series, Almquist and Wiksell (1954).

[15] E. Parzen: Empirical time series analysis: An Annoted Computor Program, Holden Day: San Francisco. (1966).

[16] H. Hajek: A property of J-divergences of marginal probability distributions Czechoslovak Math. J., 8 (83) (1958), pp 460-465.

[17] Harold W. Smith: Approximate analysis of randomly excited nonlinear controls M.I.T. Research Monograph No.34 (1964).

[18] D. Slepian: Some comments on the detection of Gaussian signals in Gaussian noise. I.R.E. Trans on Inform Theory, IT-4 (1958).